

Liste d'exercices n°17

Intégration

Exercice 1.

1. Donner le domaine de définition $\mathcal{D}$ de la fonction $t \mapsto \frac{t+7}{t^2+2t-3}$.
2. Trouver deux réels a et b tels que pour tout $t \in \mathcal{D}$, on ait

$$\frac{t+7}{t^2+2t-3} = \frac{a}{t-1} + \frac{b}{t+3}.$$

3. En déduire la valeur de l'intégrale suivante :

$$I = \int_{-2}^0 \frac{t+7}{t^2+2t-3} dt.$$

Exercice 2.

Trouver une primitive de la fonction suivante :

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}}.$$

Exercice 3.

Calculer les intégrales suivantes.

1. $\int_0^\pi \cos^2(2t) dt$
2. $\int_0^\pi \sin^3(t) dt$
3. $\int_0^\pi \cos^3(t) \sin^4(t) dt$
4. $\int_0^\pi \cos^2(t) \sin^4(t) dt$

Exercice 4.

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$G: x \mapsto \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x^2+1} f(t) dt.$$

Montrer que la fonction G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

Exercice 5.

Calculer, si elle existe, la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^x \frac{t^2}{1+t^2} dt.$$

Exercice 6.

Calculer les intégrales suivantes.

1. $\int_0^1 x^3 e^{3x} dx$
2. $\int_0^1 e^{-x} \sin(x) dx$
3. $\int_0^1 t^2 \arctan(t) dt$

Exercice 7.

Trouver une primitive des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto \ln^2(x)$

2. $t \mapsto \sin(\sqrt[3]{t})$

3. $t \mapsto t \ln(t)$.

4. $x \mapsto \frac{1}{x^2 + 2x + 5}$

5. (a) $t \mapsto \sqrt{1 - t^2}$

(b) $x \mapsto \sqrt{9 - 4x^2}$

Exercice 8.

Considérons les intégrales suivantes :

$$C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\cos(t) + \sin(t)} dt \quad \text{et} \quad S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{\cos(t) + \sin(t)} dt.$$

1. A l'aide d'un changement de variable affine, montrer que $C = S$.

2. Calculer $C + S$, puis en déduire les valeurs de C et de S .

3. Considérons l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^1 \frac{dt}{t + \sqrt{1 - t^2}}.$$

(a) Vérifier que l'intégrale I est bien définie.

(b) A l'aide d'un changement de variable, calculer l'intégrale I .

Exercice 9.

Calculer les intégrales suivantes.

1. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{3 + 2 \cos(2x)} dx$

On pourra faire le changement de variable $u = \cos(x)$.

2. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)}{3 + 2 \cos(2x)} dx$

On pourra faire le changement de variable $u = \sin(x)$.

Exercice 10.

Calculer les intégrales suivantes.

1. $\int_{-1}^1 \frac{t^3}{1 + t^2 + t^4} dt$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1 + \sin(\theta)} d\theta$, avec le changement de variable $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

3. $\int_2^3 \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx$, avec le changement de variable $u = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$.

Exercice 11.

Soit f une fonction continue sur $[0; 1]$. Pour tout entier naturel n , on pose :

$$I_n = \int_0^1 x^n f(x) dx.$$

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

Exercice 12.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue telle que $\left| \int_a^b f(x) dx \right| = \int_a^b |f(x)| dx$.

Montrer que f garde un signe constant sur $[a, b]$.

Exercice 13.

Calculer les limites, si elles existent, des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$;

2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \sum_{k=1}^n \left(2 + \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)^2$.