Lycée Fénelon
Année 2024-2025

BCPST1
A. Panetta

Devoir maison n°10
A rendre pour le Mardi 4 février 2025

Problème

Pour les deux expériences du problème, on dispose d'une pièce équilibrée et d'une urne contenant au début de chaque expérience une boule noire et une boule blanche.
On dispose par ailleurs d'un nombre suffisant de boules noires et de boules blanches discernables seulement par la couleur.

Partie I : Première expérience

On lance une pièce et on note le résultat (pile ou face).
On fait alors un nombre indéterminé de tirages, chacun comprenant deux étapes :

i) On tire une boule dans l'urne et on l'y remet ;
ii) Si la pièce a donné pile (resp. face), on ajoute dans l'urne une nouvelle blanche (resp. noire).

1. Calculer la probabilité de tirer une boule blanche au k-ème tirage.
2. Calculer la probabilité de ne tirer que des boules blanches lors des k premiers tirages.
3. Au k-ème tirage, on tire une boule blanche. Quelle est alors la probabilité que la pièce ait donné pile ?

Partie II : Deuxième expérience

On fait un nombre indéterminé de tirages, chacun comprenant trois étapes :

i) On lance une pièce équilibrée ;
ii) On tire une boule dans l'urne et on l'y remet ;
iii) Si le résultat de l'étape i) était pile (resp. face), on ajoute dans l'urne une nouvelle boule blanche (resp. noire).

On définit les événements : A_k :« au tirage k, on tire une boule blanche » et B_k :« au tirage k, on obtient pile ».

1. Soient deux entiers k et n tels que $k \geqslant 1$ et $0 \leqslant n \leqslant k-1$.
   Notons $T_{k,n}$:« il y a $n+1$ boules blanches dans l'urne au début du k-ème tirage ».
   (a) Montrer que $\mathbb{P}(T_{k,n}) = \binom{k-1}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$.
   (b) Montrer que $\sum_{q=0}^{k} \binom{k}{q} q = k2^{k-1}$.
   (c) A l'aide de la formule des probabilités totales, déduire de ce qui précède la probabilité de tirer une boule blanche au k-ème tirage. Ce résultat est-il surprenant ?
2. Sans calcul, indiquer si les événements $T_{k,n}$ et B_k sont indépendants.
3. Soit $k \geqslant 1$ un entier fixé.
   (a) Pour tout $n \in [\![0, k-1]\!]$, calculer $\mathbb{P}_{B_k \cap T_{k,n}}(A_{k+1})$ et $\mathbb{P}_{\overline{B_k} \cap T_{k,n}}(A_{k+1})$.

(b) Pour $n \in [\![0, k-1]\!]$, exprimer $\mathbb{P}_{B_k}(A_{k+1})$ à l'aide des nombres $\mathbb{P}(T_{k,n})$ et $\mathbb{P}_{B_k \cap T_{k,n}}(A_{k+1})$.
Donner une expression similaire pour $\mathbb{P}_{\overline{B_k}}(A_{k+1})$.

(c) Les événéments A_{k+1} et B_k sont-ils indépendants ?

4. Les événements A_2 et A_3 sont-ils indépendants ?