Corrigé du devoir maison n°8

Exercice 1 : Calcul de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

1. On a
$$S = a + a^4 = e^{\frac{2i\pi}{5}} + (e^{\frac{2i\pi}{5}})^4 = e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{\frac{8i\pi}{5}} = e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{\frac{-2i\pi}{5}}$$
donc $\boxed{S = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)}$ et
$$T = a^2 + a^3 = (e^{\frac{2i\pi}{5}})^2 + (e^{\frac{2i\pi}{5}})^3 = e^{\frac{4i\pi}{5}} + e^{\frac{6i\pi}{5}} = e^{\frac{4i\pi}{5}} + e^{\frac{-4i\pi}{5}}$$
d'où $\boxed{T = 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right).}$

2. On a $S + T = a + a^2 + a^3 + a^4$. On reconnaît la somme de termes consécutifs d'une progression géométrique avec $a \neq 1$ donc
$$S + T = \sum_{k=1}^{4} a^k = a\frac{1-a^4}{1-a} = e^{\frac{2i\pi}{5}}\frac{1-e^{\frac{-2i\pi}{5}}}{1-e^{\frac{2i\pi}{5}}} = \frac{e^{\frac{2i\pi}{5}}-1}{1-e^{\frac{2i\pi}{5}}}$$
d'où $\boxed{S + T = -1}$.
Par ailleurs, on a
$$ST = (a + a^4)(a^2 + a^3) = a^3 + a^4 + a^6 + a^7.$$
Or, on remarque que $a^6 = e^{\frac{12i\pi}{5}} = e^{\frac{2i\pi}{5}} = a$ et $a^7 = a^6 \times a = a \times a = a^2$ donc $ST = a + a^2 + a^3 + a^4 = S + T$ d'où $\boxed{ST = -1}$.

3. S et T sont racines du trinôme du second degré $x^2 - (S+T)x + ST = 0$, i.e.
$$\boxed{x^2 + x - 1 = 0.}$$

4. Calculons les racines du trinôme $x^2 + x - 1 = 0$. On a $\Delta = 1 - 4 \times 1 \times (-1) = 5 > 0$ donc les racines sont
$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} > 0.$$
Or, on sait que les racines sont $S = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $T = 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.
Puisque $\frac{2\pi}{5} \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$ et puisque $\frac{4\pi}{5} \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$, $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) < 0$.
On en déduit que $S = x_2$ et $T = x_1$ donc $2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ d'où $\boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.}$
Enfin, d'après la relation fondamentale de la trigonométrie, $\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 1$ donc
$$\sin^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 1 - \frac{5-2\sqrt{5}+1}{16} = \frac{10+2\sqrt{5}}{16} = \frac{5+\sqrt{5}}{8}.$$

Puisque $\frac{2\pi}{5} \in]0, \pi[, \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$ donc

$$\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}} = \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$$

d'où en multipliant par $\sqrt{2}$ au numérateur et au dénominateur, $\boxed{\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.}$

Exercice 2 : Une suite récurrente

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale et on a pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) = -2x$. En particulier, pour tout $x \in [0,1], f'(x) \leqslant 0$ donc $\boxed{f \text{ est décroissante sur } [0,1].}$
   La fonction f est décroissante et continue sur $[0,1]$ donc $f([0,1]) = [f(1), f(0)]$, d'où $\boxed{f([0,1]) = [0,1].}$
2. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in [0,1]$.
   •**Initialisation :** $u_0 \in [0,1]$ d'après l'énoncé.
   •**Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n \in [0,1]$.
   D'après la question précédente, on en déduit que $u_{n+1} = f(u_n) \in f([0,1]) = [0,1]$ donc $u_{n+1} \in [0,1]$.
   On a donc bien montré par récurrence que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n \in [0,1].}$
3. Soient $(x,y) \in [0,1]^2$ avec $x \leqslant y$.
   Puisque f est décroissante sur $[0,1]$, on en déduit que $f(x) \geqslant f(y)$.
   Or, $f([0,1]) = [0,1]$ donc $(f(x), f(y)) \in [0,1]^2$, d'où, par décroissance de f sur $[0,1]$, on trouve $f(f(x)) \leqslant f(f(y))$, i.e. $f \circ f(x) \leqslant f \circ f(y)$, ce qui prouve que $\boxed{f \circ f \text{ est croissante sur } [0,1].}$
   On a pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f \circ f(u_{2n})$.
   • Si $u_0 \leqslant u_2$, puisque $f \circ f$ est croissante sur $[0,1]$, on a $u_2 = f \circ f(u_0) \leqslant f \circ f(u_2) = u_4$ et on montre par une récurrence immédiate que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   • Si $u_0 \geqslant u_2$, puisque $f \circ f$ est croissante sur $[0,1]$, on a $u_2 = f \circ f(u_0) \geqslant f \circ f(u_2) = u_4$ et on montre par une récurrence immédiate que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   Ainsi, dans les deux cas, $\boxed{\text{la suite } (u_{2n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ est monotone.}}$
   On montre de même que $\boxed{\text{la suite } (u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}} \text{ est monotone.}}$
4. On a pour tout $x \in [0,1]$:

$$f \circ f(x) - x = f(1-x^2) - x = 1 - (1-x^2)^2 - x = 1 - (1-2x^2+x^4) - x = -x^4 + 2x^2 - x = -x(x^3 - 2x + 1).$$

   Or, pour tout $x \in [0,1], x^3 - 2x + 1 = (x-1)(x^2+x-1)$.
   Ainsi, pour tout $x \in [0,1], f \circ f(x) = x \Leftrightarrow f \circ f(x) - x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$ ou $x^2 + x - 1 = 0$.
   Ce trinôme du second degré admet deux racines : $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \in]0,1[$ et $\alpha' = \frac{-\sqrt{5}-1}{2} < 0$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \circ f \text{ admet donc trois points fixes sur } [0,1] : 0, 1 \text{ et } \alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \in]0,1[.}$$

5. Puisque $\alpha^2+\alpha-1=0$, on a $\alpha - f(\alpha)=0$ donc α est un point fixe de f.
Ainsi, si $u_0=\alpha$, on a $u_1=f(u_0)=f(\alpha)=\alpha$ et on en déduit par une récurrence immédiate que $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}, u_n=\alpha.}$

6. (a) La fonction $f\circ f$ est croissante, continue sur $[0,1]$ et on a $f\circ f(0)=0, f\circ f(\alpha)=\alpha$ et $f\circ f(1)=1$ donc $f\circ f([0,\alpha[)=[f\circ f(0), f\circ f(\alpha)[=[0,\alpha[$.
Puisque $u_0\in[0,\alpha[$ et pour tout $n\in\mathbb{N}, u_{2n+2}=f\circ f(u_{2n})$, on montre par une récurrence immédiate (similaire à la question 2) que $\boxed{\text{pour tout } n\in\mathbb{N}, u_{2n}\in[0,\alpha[.}$
On a pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$u_{2(n+1)}-u_{2n}=u_{2n+2}-u_{2n}=f\circ f(u_{2n})-u_{2n}=u_{2n}(1-u_{2n})(u_{2n}^2+u_{2n}-1)$$

en reprenant le calcul fait en question 4.
On sait que pour tout $n\in\mathbb{N}, u_{2n}\in[0,\alpha[\subset[0,1]$ donc $u_{2n}\geqslant 0$ et $1-u_{2n}\geqslant 0$.
Par ailleurs, puisque $x\mapsto x^2+x-1$ est un trinôme du second degré de cœfficient dominant positif et ayant pour racines $\alpha'<0$ et α, on sait que pour tout $x\in[\alpha',\alpha], x^2+x-1\leqslant 0$.
Puisque pour tout $n\in\mathbb{N}, u_{2n}\in[0,\alpha[\subset[\alpha',\alpha]$, alors $u_{2n}^2+u_{2n}-1\leqslant 0$.
Par produit, on en déduit que pour tout $n\in\mathbb{N}, u_{2(n+1)}-u_{2n}\leqslant 0$, donc

$$\boxed{\text{la suite } (u_{2n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$$

La suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0. D'après le théorème de la limite mononote, la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
Puisque pour tout $n\in\mathbb{N}, u_{2(n+1)}=f\circ f(u_{2n})$ où $f\circ f$ est continue sur $[0,1]$ et que pour tout $n\in\mathbb{N}, u_{2n}\in[0,1]$, on en déduit que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point fixe de $f\circ f$ dans $[0,1]$, c'est à dire vers $0,\alpha$ ou 1.
Puisque la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, on a pour tout $n\in\mathbb{N}, u_{2n}\leqslant u_0<\alpha$ donc la seule possibilité est $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_{2n}=0.}$

(b) La fonction $f\circ f$ est croissante, continue sur $[0,1]$ et on a $f\circ f(0)=0, f\circ f(\alpha)=\alpha$ et $f\circ f(1)=1$ donc $f\circ f(]\alpha,1])=]f\circ f(\alpha), f\circ f(1)]=]\alpha,1]$.
Puisque $u_1\in]\alpha,1]$ et pour tout $n\in\mathbb{N}, u_{2n+3}=f\circ f(u_{2n+1})$, on montre par une récurrence immédiate (similaire à la question 2) que $\boxed{\text{pour tout } n\in\mathbb{N}, u_{2n+1}\in]\alpha,1].}$
On a pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$u_{2(n+1)+1}-u_{2n+1}=u_{2n+3}-u_{2n+1}=f\circ f(u_{2n+1})-u_{2n+1}=u_{2n+1}(1-u_{2n+1})(u_{2n+1}^2+u_{2n+1}-1)$$

en reprenant le calcul fait en question 4.
On sait que pour tout $n\in\mathbb{N}, u_{2n+1}\in]\alpha,1]\subset[0,1]$ donc $u_{2n}+1\geqslant 0$ et $1-u_{2n+1}\geqslant 0$.
Par ailleurs, puisque $x\mapsto x^2+x-1$ est un trinôme du second degré de cœfficient dominant positif et ayant pour racines $\alpha'<0$ et α, on sait que pour tout $x\in[\alpha,1], x^2+x-1\geqslant 0$.
Puisque pour tout $n\in\mathbb{N}, u_{2n+1}\in]\alpha,1]$, alors $u_{2n+1}^2+u_{2n+1}-1\geqslant 0$.
Par produit, on en déduit que pour tout $n\in\mathbb{N}, u_{2(n+1)+1}-u_{2n+1}\geqslant 0$, donc

$$\boxed{\text{la suite } (u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$$

La suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 1. D'après le théorème de la limite mononote, la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{2(n+1)+1} = f \circ f(u_{2n+1})$ où $f \circ f$ est continue sur $[0,1]$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{2n+1} \in [0,1]$, on en déduit que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point fixe de $f \circ f$ dans $[0,1]$, c'est à dire vers $0, \alpha$ ou 1.

Puisque la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, on a pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{2n+1} \geqslant u_1 > \alpha$ donc la seule possibilité est $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = 1.}$

(c) Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} \neq \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1}$, on en déduit que $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ne converge pas.}}$

7. Si $u_0 \in]\alpha, 1]$, les rôles de $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont inversés par rapport à la question précédente et on a dans ce cas

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = 1 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = 0.}$$

Exercice 3 : Systèmes linéaires

1.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & z & = & 3a \\ -2x & - & 3y & + & 3z & = & b \\ x & + & y & - & 2z & = & c \end{array}\right. \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1}{\Longleftrightarrow}} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & z & = & 3a \\ & & y & + & z & = & 6a+b \\ & - & y & - & z & = & -3a+c \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\overset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}{\Longleftrightarrow}} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & & & - & 3z & = & -9a-2b \\ & & y & + & z & = & 6a+b \\ & & & & 0 & = & 3a+b+c \end{array}\right.$$

La dernière ligne montre que $\boxed{\text{le système est compatible si et seulement si } 3a+b+c=0}$ et dans ce cas, on a $y = -z + 6a + b$ et $x = 3z - 9a - 2b$.

Ainsi, dans le cas où le système est compatible, il y a une infinité de solutions que sont

$$\boxed{\{(x,y,z) = (3z - 9a - 2b, -z + 6a + b, z), z \in \mathbb{R}\}.}$$

2.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & + & z & = & a \\ 2x & + & 13y & - & 7z & = & b \\ x & - & y & + & z & = & c \end{array}\right. \underset{L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow}} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & + & z & = & a \\ & & 12y & - & 8z & = & -a+b \\ & - & 3y & + & z & = & -a+2c \end{array}\right. \underset{L_3 \leftarrow 4L_3 + L_2}{\overset{L_1 \leftarrow 12L_1 - L_2}{\Longleftrightarrow}}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 24x & & & + & 20z & = & 13a-b \\ & & 12y & - & 8z & = & -a+b \\ & & & - & 4z & = & -5a+b+8c \end{array}\right. \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3}{\overset{L_1 \leftarrow L_1 + 5L_3}{\Longleftrightarrow}} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 24x & & & & & = & -12a+4b+40c \\ & & 12y & & & = & 9a-b-16c \\ & & & - & 4z & = & -5a+b+8c \end{array}\right.$$

On constate que le système est compatible pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et l'unique solution du système est

$$\boxed{(x,y,z) = \left(-\frac{a}{2} + \frac{b}{6} + \frac{5c}{3}, \frac{3a}{4} - \frac{b}{12} - \frac{4c}{3}, \frac{5a}{4} - \frac{b}{4} - 2c\right).}$$

3.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} & & & & 4z & - & t & = & a \\ 3x & + & y & + & z & + & 2t & = & b \\ & & y & - & 2z & + & t & = & c \\ & & & & & & 2t & = & d \end{array}\right. \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x & + & y & + & z & + & 2t & = & b \\ & & & & 4z & - & t & = & a \\ & & y & - & 2z & + & t & = & c \\ & & & & & & 2t & = & d \end{array}\right. \overset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} 3x & + & y & + & z & + & 2t & = & b \\ & & y & - & 2z & + & t & = & c \\ & & & & 4z & - & t & = & a \\ & & & & & & 2t & = & d \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccccc} 3x & + & y & + & z & & & = & b-d \\ & & y & - & 2z & & & = & c-\frac{d}{2} \\ & & & & 4z & & & = & a+\frac{d}{2} \\ & & & & & & t & = & \frac{d}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{cccccc} 3x & + & y & & & = b-d-\frac{a}{4}-\frac{d}{8} \\ & & y & & & = c-\frac{d}{2}+\frac{a}{2}+\frac{d}{4} \\ & & & z & & = \frac{a}{4}+\frac{d}{8} \\ & & & & t & = \frac{d}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccc} 3x & + & & & & = -\frac{a}{4}+b-\frac{9d}{8}-\frac{a}{2}-c+\frac{d}{4} \\ & & y & & & = \frac{a}{2}+c-\frac{d}{4} \\ & & & z & & = \frac{a}{4}+\frac{d}{8} \\ & & & & t & = \frac{d}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} 3x & & & & = -\frac{3a}{4}+b-c-\frac{7d}{8} \\ & y & & & = \frac{a}{2}+c-\frac{d}{4} \\ & & z & & = \frac{a}{4}+\frac{d}{8} \\ & & & t & = \frac{d}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} x & & & & = -\frac{a}{4}+\frac{b}{3}-\frac{c}{3}-\frac{7d}{24} \\ & y & & & = \frac{a}{2}+c-\frac{d}{4} \\ & & z & & = \frac{a}{4}+\frac{d}{8} \\ & & & t & = \frac{d}{2} \end{array}\right.$$

Ainsi, le système est compatible pour tout $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ et l'unique solution du système est

$$\boxed{(x, y, z, t) = \left(-\frac{a}{4}+\frac{b}{3}-\frac{c}{3}-\frac{7d}{24}, \frac{a}{2}+c-\frac{d}{4}, \frac{a}{4}+\frac{d}{8}, \frac{d}{2}\right).}$$