Corrigé du devoir maison n°14

Exercice 1 : Lieux communs

1. (a) La droite (AB) passe par le point $A(1,2,-1)$ et admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc une représentation paramétrique de la droite (AB) est

$$\boxed{\left\{\begin{array}{rcl} x & = & -3\mu+1 \\ y & = & 2\mu+2 \\ z & = & \mu-1 \end{array}\right., \mu \in \mathbb{R}.}$$

(b) Cherchons deux vecteurs orthogonaux au vecteur $\overrightarrow{AB}$ et non colinéaires entre eux.

Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. On a bien $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{AB} \cdot \vec{v} = 0$ et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires entre eux.

La droite (AB) est alors perpendiculaire à n'importe quel plan engendré par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (par exemple, celui passant par l'origine $(0,0,0)$).

Soit M un point de l'espace de coordonnées (x,y,z). On a les équivalences :

$$M \in (AB) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} & = & 0 \\ \overrightarrow{AM} \cdot \vec{v} & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x-1+3(z+1) & = & 0 \\ y-2-2(z+1) & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \boxed{\left\{\begin{array}{rcl} x+3z+2 & = & 0 \\ y-2z-4 & = & 0 \end{array}\right.}$$

2. Soit $m \in \mathbb{R}$. Soit M un point de l'espace de coordonnées (x,y,z). On a les équivalences :

$$M \in (AB) \cap \mathcal{D}_m \Leftrightarrow \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \left\{\begin{array}{rcl} x = 3+\lambda & = & -3\mu+1 \\ y = 2-2\lambda & = & 2\mu+2 \\ z = m+2\lambda & = & \mu-1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \left\{\begin{array}{rcl} \lambda & = & -3\mu-2 \\ \lambda & = & -\mu \\ m-2\mu & = & \mu-1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \left\{\begin{array}{rcl} -\mu & = & -3\mu-2 \\ \lambda & = & -\mu \\ \mu & = & \dfrac{m+1}{3}. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \mu & = & -1 \\ \lambda & = & 1 \\ -1 & = & \dfrac{m+1}{3}. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \mu & = & -1 \\ \lambda & = & 1 \\ m & = & -4. \end{array}\right.$$

Ainsi, $\boxed{\text{si } m \neq -4, (AB) \cap \mathcal{D}_m = \emptyset}$ et si $m = -4$, pour $\lambda = 1$ et $\mu = -1$, on trouve $(x,y,z) = (4,0,-2)$ donc $\boxed{(AB) \cap \mathcal{D}_{-4} = \{(4,0,-2)\}.}$

3. Soit $m = -4$. On appelle $\mathcal{P}_{-4}$ le plan qui contient les droites (AB) et $\mathcal{D}_{-4}$, qui sont sécantes d'après la question précédente.

Au vu de la représentation paramétrique de $\mathcal{D}_{-4}$, un vecteur directeur de $\mathcal{D}_{-4}$ est $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Puisque les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires, le plan $\mathcal{P}_{-4}$ est alors le plan de l'espace passant par le point de coordonnées $(4, 0, -2)$ et de base $(\overrightarrow{AB}, \vec{w})$.

Trouvons un vecteur normal $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ à ce plan. On a alors

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \vec{w} \cdot \vec{n} & = & 0 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a - 2b + 2c & = & 0 \\ -3a + 2b + c & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & 2b - 2c \\ -4b + 7c & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & \frac{3}{2}c \\ b & = & \frac{7}{4}c \end{array} \right.$$

Pour $c = 4$, on trouve le vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ qui est bien un vecteur orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{w}$, donc normal au plan $\mathcal{P}_{-4}$.
Ainsi, le plan $\mathcal{P}_{-4}$ admet une équation cartésienne de la forme $6x + 7y + 4z + d = 0$.
Puisque le plan passe par le point $(4, 0, -2)$, on trouve $6 \times 4 + 7 \times 0 + 4 \times -2 + d = 0$, d'où $d = -16$.

$$\boxed{\text{Une équation cartésienne du plan } \mathcal{P}_{-4} \text{ est } 6x + 7y + 4z - 16 = 0.}$$

Exercice 2 : Famille de plans

1. Soit $m \in \mathbb{R}$. Un vecteur normal au plan $\mathcal{P}_m$ est $\boxed{\vec{n_m} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ -m \end{pmatrix}}$ (qui est bien un vecteur non nul).
2. Une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ est

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ y & = & \lambda \\ z & = & \lambda \end{array} \right. , \lambda \in \mathbb{R}.}$$

3. Soit $m \in \mathbb{R}$. Soit $(x, y, z) \in \mathcal{D}$. On a $x = 1$ et $y = z$ donc

$$x + my - mz = 1 + my - my = 1,$$

ce qui prouve que $(x, y, z) \in \mathcal{P}_m$. $\boxed{\text{Ainsi, le plan } \mathcal{P}_m \text{ contient bien la droite } \mathcal{D}.}$
4. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
On a les équivalences suivantes :

$$(x, y, z) \in \bigcup_{m \in \mathbb{R}} \mathcal{P}_m \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{R}, x + my - mz = 1 \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{R}, my - mz = 1 - x.$$

Il y a alors deux cas :

- Si $y \neq z$, alors $m = \dfrac{1-x}{y-z}$ et $(x,y,z) \in \mathcal{P}_{\frac{1-x}{y-z}} \subset \bigcup\limits_{m\in\mathbb{R}} \mathcal{P}_m$.

- Si $y = z$, alors $1 - x = 0$, i.e. $x = 1$ ce qui est l'équation du plan $\mathcal{P}_0$ et alors $(x,y,z) \in \mathcal{P}_0 \subset \bigcup\limits_{m\in\mathbb{R}} \mathcal{P}_m$.

On a donc bien $(x,y,z) \in \bigcup\limits_{m\in\mathbb{R}} \mathcal{P}_m \Leftrightarrow y \neq z \,\text{ou}\, x = 1$ d'où l'égalité

$$\boxed{\bigcup_{m\in\mathbb{R}} \mathcal{P}_m = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x = 1 \,\text{ou}\, y \neq z\}.}$$

5. (a) Soit $m \in \mathbb{R}$. Soit $H_m(x,y,z)$ le projeté orthogonal de O sur le plan $\mathcal{P}_m$ (on remarque que $O \notin \mathcal{P}_m$).
Le vecteur $\overrightarrow{OH_m}$ est colinéaire au vecteur $\vec{n_m}$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$(x,y,z) = \lambda(1, m, -m) = (\lambda, \lambda m, -\lambda m.)$$

D'autre part, $H_m \in \mathcal{P}_m$ donc $x + my - mz = 1$ d'où

$$\lambda + \lambda m^2 + \lambda m^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2m^2+1}$$

avec $2m^2 + 1 \neq 0$.
Ainsi, on a $\boxed{H_m\left(\dfrac{1}{2m^2+1}, \dfrac{m}{2m^2+1}, -\dfrac{m}{2m^2+1}\right).}$

(b) La distance du point O au plan $\mathcal{P}_m$ est alors donnée par la longueur

$$\boxed{OH_m = \sqrt{\left(\frac{1}{2m^2+1}\right)^2 + \left(\frac{m}{2m^2+1}\right)^2 + \left(-\frac{m}{2m^2+1}\right)^2} = \sqrt{\frac{2m^2+1}{(2m^2+1)^2}} = \sqrt{\frac{1}{2m^2+1}}.}$$